CONCOURS COMMUN 1996
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques
Classements SUP (MPSI, PCSI, PTSI) et SPE (MP, PC, PT, PSI)

Mercredi 22 mai 1996 de 14h00 à 17h00

Instructions :

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME I

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \ldots u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

PREMIERE PARTIE

I - 1 En considérant le quotient $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

I - 2 Soit $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n}(1+\frac{1}{p})$.

Montrer que : $\forall n \geq 1,\ p_n = n+1$. Quelle est la nature du produit (p_n) ?

I - 3 Soient un réel a différent de $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \cos\frac{a}{2^p}$.

Pour tout entier naturel n non nul, calculer $p_n \sin\dfrac{a}{2^n}$; en déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n).

DEUXIEME PARTIE

II - 1 Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.

II - 1a Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0,\ u_n > 0$.

II - 1b On pose $S_n = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$.

Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n).
Lorsque (S_n) converge vers ℓ donner la limite de la suite (p_n) en fonction de ℓ.

II - 2 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}$ et soit $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}$.

II - 2a Montrer que : $\forall p \geq 3, \ \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \frac{\ln p}{p}$.

II - 2b En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n).

TROISIEME PARTIE

III - 1 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + v_p)$ où (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

On pose $S'_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$.

III - 1a Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(1+x) < x$.

III - 1b Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

III - 1c Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

III - 2 Déduire de la question I - 2 la limite de la suite (S'_n) définie par $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

III - 3 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + a^{2^p})$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

III - 3a Que dire de la nature du produit (p_n) lorsque $a \geq 1$?

III - 3b On suppose $a \in]0, 1[$.

III - 3bi Montrer que le produit (p_n) converge.

III - 3bii Pour tout entier naturel n non nul, calculer $(1 - a^2)p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n).

PROBLEME II

Soit E un K espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E. On désigne par $\operatorname{Ker} u$ le noyau de u et $\operatorname{Im} u$ l'image de u.

Pour tout entier k strictement positif, u^k désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u \cdots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E.

PREMIERE PARTIE

IA Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

IA - 1 Déterminer le rang de u et donner une base de $\operatorname{Im} u$, une base de $\operatorname{Ker} u$ en fonction des vecteurs de la base B.

IA - 2 Calculer M^2, M^3 et montrer que pour tout entier $p \geq 2$, il existe un réel α_p et une matrice A telle que : $M^p = \alpha_p A$. Expliciter alors M^p.

IA - 3a Donner une base, en fonction des vecteurs de la base B, de chacun des sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Im} u^2$, $\operatorname{Ker} u^2$, $\operatorname{Im} u^3$, $\operatorname{Ker} u^3$.

IA - 3b Déterminer : $\forall k \geq 2$, $\operatorname{Ker} u^k$, $\operatorname{Im} u^k$.

IA - 3c Montrer que $E = \operatorname{Ker} u^2 \oplus \operatorname{Im} u^2$.

IB Soit $K[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps K et d l'endomorphisme de $K[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

IB - 1 d est-il injectif ? d est-il surjectif ? Comment peut-on en déduire que $K[X]$ n'est pas de dimension finie ?

IB - 2 Déterminer : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker} d^q$.

DEUXIEME PARTIE

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \operatorname{Im} u^p$ et $K_p = \operatorname{Ker} u^p$.

II - 1 Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

II - 2 On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_p$ et K_p.

II - 3 On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

II - 3a Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.

II - 3b Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.

II - 3c Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

II - 4 Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?