MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

• Les candidats doivent vérifier que les sujets s'étendent sur 4 pages numérotées y compris celle-ci.

• Les candidats doivent traiter les problèmes I et II qui sont indépendants.

Ces problèmes seront rédigés sur des feuilles de composition séparées (mais à rendre regroupées, conformément aux instructions). Bien préciser en haut de chaque feuille : problème I ou problème II.

PROBLEME 1

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I.

Notations: Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée f' est continue sur I.

PARTIE I.

1°) On définit la fonction φ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par: $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{\sin t}$ si $t\neq 0$ et $\varphi(0)=0$.

a) i) Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

ii) En déduire que φ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.

b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

c) Soit la fonction ψ définie sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par: $\psi(t)=\dfrac{t}{\sin t}$ si $t\neq 0$ et $\psi(0)=1$.

Montrer que ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Préciser $\psi'(0)$.

2°) Soient a et b réels tels que a<b. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a,b], à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que: $\displaystyle\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. (1)

3°) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit S_n sur $[0,\pi]$ par: $S_n(t)=1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)$.

a) i) Montrer, *sans récurrence*, que: $\forall t\in]0,\pi[,\ S_n(t)=\dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ (2)

ii) Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

b) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$.

PARTIE II.

1°) a) Déterminer la limite de $\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire la limite de $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2°) a) i) Vérifier que la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par: $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

ii) Comparer $F((2n+1)\frac{\pi}{2})$ et I_n.

b) i) Soit x réel, $x \geq \frac{\pi}{2}$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x), tel que: $(2n+1)\frac{\pi}{2} \leq x < (2n+3)\frac{\pi}{2}$. On note $\alpha(x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

ii) Montrer que $\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

c) En déduire que F(x) admet une limite ℓ si x tend vers $+\infty$. Préciser ℓ.

3°) a) Soient x et y réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que: $\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leq \frac{2}{x}$.
(On effectuera une intégration par parties).

b) En déduire que: $\forall x > 0$, $|\ell - F(x)| \leq \frac{2}{x}$.

PARTIE III.

1°) a) Déterminer deux réels α et β, indépendants de n, tels que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$. ($\alpha$ et β sont désormais ainsi fixés).

b) En déduire que $2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2)\, S_n(\frac{t}{2})\,dt$
est un réel indépendant de n, que l'on précisera.

c) On définit la fonction h sur $]0,\pi]$ par: $h(t) = \frac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin(\frac{t}{2})}$.
Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

2°) On définit les suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $(n \geq 1)$, et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ $(n \geq 0)$.

a) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

PROBLEME 2

Notations:

n est un entier naturel fixé, $n\geq 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

PARTIE I.

Si $f\in\mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par:
$\forall x\in\mathbb{R}$, $\Delta(f)(x) = f(x+1)-f(x)$, et $T(f)(x)=f(x+1)$.
On admettra (aisément!) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.
On note $\Delta^0=T^0=Id_{\mathcal{F}}$ (donc si $f\in\mathcal{F}$, $\Delta^0(f)=T^0(f)=f$), et,
si $j\in\mathbb{N}$, $j\geq 1$, $\Delta^j = \Delta^{j-1}\circ\Delta = \Delta\circ\Delta^{j-1}$, $T^j = T^{j-1}\circ T = T\circ T^{j-1}$.

1°) a) i) Soit $P\in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

ii) Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n, noté Δ_n.

b) i) Déterminer $\mathrm{Ker}\Delta_n$.

ii) En déduire le rang de Δ_n. Déterminer $\mathrm{Im}\Delta_n$.

2°) Pour $k\in\mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ N_0(x)=1 \text{ et } N_k(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

a) i) Pour $k\geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j\geq 0}$.

ii) Calculer, pour $j\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.

b) i) Montrer que la famille $(N_0, N_1, \ldots N_n)$ est une base de E_n.

ii) Soit $P\in E_n$. P s'écrit $P=a_0N_0+a_1N_1+\ldots+a_nN_n$, où $(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$.

Exprimer les a_j en fonction des $(\Delta^j(P))(0)$.

3°) a) Soient $k\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathcal{F}$. Déterminer pour $x\in\mathbb{R}$, $(T^k(f))(x)$.

b) Soit $j\in\mathbb{N}$. Soit $f\in\mathcal{F}$.

i) Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0\leq k\leq j$.
(On pourra remarquer que $\Delta=T-Id_{\mathcal{F}}$).

ii) En déduire que $(\Delta^j(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points 0,1..,j: $f(0),f(1),\ldots,f(j)$.

PARTIE II.

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant: $(\mathcal{P})\begin{cases} d°P\leq n \\ \forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\ P(k)=f(k). \end{cases}$

On pose $N(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-j) = x(x-1)..(x-n)$

1°) a) Soit l'application linéaire Φ: $\begin{array}{rcl} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(0),..P(n)) \end{array}$
Montrer que Φ est un isomorphisme.

b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2°) a) Pour $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.

b) En déduire l'expression de P_f en fonction des $(\Delta^j(f))(0)$ et des polynômes N_j.

3°) Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
On note $M_n=\sup\{|f^{(n+1)}(t)|,\ t\in[0,n]\}$.

a) Soit $x\in[0,n]$, non entier.
Montrer que: $\exists c\in]0,n[/\quad f(x)-P_f(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}N(x)$.
(On pourra poser $\varphi(t)=f(t)-P_f(t)-KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x)=0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.)

b) En déduire que: $\forall x\in[0,n]$, $|f(x)-P_f(x)|\leq\dfrac{1}{n+1}M_n$
(On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j,j+1]$, où $j\in\{0,1,\ldots,n-1\}$).