Ecole des Mines d'ALBI-CARMAUX | Ecole des Mines d'ALES | Ecole des Mines de DOUAI | Ecole des Mines de NANTES

MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

* *Les candidats doivent traiter les problèmes I et II qui sont indépendants.*

PROBLEME I

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt$$

1°/ Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudier sa parité.

2°/ Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}^{+*}$ admet une infinité de maximums relatifs [respectivement de minimums relatifs] en des points que l'on peut représenter par les termes d'une suite strictement croissante $(x_n)_{n\geq 1}$ [respectivement $(y_n)_{n\geq 1}$] .

On pose : $\forall\, n \geq 1$, $a_n = f(x_n)$ et $b_n = f(y_n)$.

3°/ Montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes .

En déduire que $f(x)$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

Partie B

On se propose de déterminer une valeur approchée du nombre a_1 défini dans la partie A.

1°/ Soit g la fonction définie sur $[0;\sqrt{\pi}]$ par:

$$\forall\, t \in [0;\sqrt{\pi}] \quad , \quad g(t) = \sin t^2$$

Déterminer un majorant M_2 de $\{ \ | g''(t)| \ ; \ t \in [0;\sqrt{\pi}] \ \}$.

2°/ Soit k un nombre entier strictement positif . On partage l'intervalle $[\ 0\ ;\ \sqrt{\pi}\ ]$ en k intervalles de même longueur $\frac{\sqrt{\pi}}{k}$ et l'on pose:

$$\forall\ i \in \{\ 0,\dots k\ \}\ ,\quad \alpha_i = \frac{i\sqrt{\pi}}{k}$$

On a alors: $$\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\ dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)\ dt$$

On pose , pour tout i de $\{\ 0,\dots(k-1)\}$, $\beta_i = \dfrac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$ et l'on se propose de prendre comme valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\ dt$ l'intégrale $I(k)$ telle que $I(k) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \varphi(t)\ dt$, où φ est la fonction en escalier telle que:

$$\begin{cases} \forall\ i \in \{\ 0,\dots(k-1)\ \}\ ,\quad \forall\ t \in [\ \alpha_i\ ;\ \alpha_{i+1}\ [\ ,\quad \varphi(t) = g(\beta_i) \\ \varphi(\sqrt{\pi}) = g(\sqrt{\pi}) \end{cases}$$

a) Exprimer $I(k)$ en fonction de k et des nombres β_i .

b) Justifier , pour tout i de $\{\ 0,\dots(k-1)\}$, l'égalité :

$$\forall\ t \in [\ \alpha_i;\alpha_{i+1}]\ ,\quad g(t) = g(\beta_i) + g'(\beta_i)\ (t - \beta_i) + \int_{\beta_i}^{t} g''(u)\ (t-u)\ du$$

c) En déduire que l'on a:

$$\left|\ \int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\ dt - I(k)\ \right| \leq \frac{M_2\ \pi\ \sqrt{\pi}}{24\ k^2}$$

3°/ a) Déterminer alors le plus petit entier k_0 tel que le majorant de l'erreur déterminé précédemment soit inférieur à 10^{-2} .

b) Calculer alors , à 10^{-4} près , la valeur approchée de a_1 obtenue par la méthode précédente.

PROBLEME II

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont des nombres entiers relatifs et $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation :

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

On considère l'application F qui, à tout point M de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$, fait correspondre le point $F(M)$ de coordonnées (x',y') telles que :

$$\begin{cases} x' = 9x + 20y \\ y' = 4x + 9y \end{cases}$$

Partie A

1°/ Determiner les équations des asymptotes de $\mathcal{H}$.
Représenter $\mathcal{H}$ graphiquement .

2°/ L'application F de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est-elle bijective ?
F est-elle une isométrie ?

3°/ Soit M un point de $\mathcal{P}$; prouver les équivalences suivantes :

a) $(M \in \mathcal{H}) \Leftrightarrow (F(M) \in \mathcal{H})$

b) $(M \in \mathcal{E}) \Leftrightarrow (F(M) \in \mathcal{E})$

Partie B

On appelle S le point admettant $(1,0)$ pour coordonnées dans $\mathcal{R}$ et on pose $A_1 = F(S)$. On considère le nouveau repère $T = (O, \vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$ de $\mathcal{P}$ défini par les trois conditions suivantes :

. $\vec{\varepsilon_1}$ et $\vec{\varepsilon_2}$ sont des vecteurs directeurs des asymptotes de $\mathcal{H}$.
. S admet $(1,1)$ pour coordonnées dans T .
. l'abscisse de A_1 dans T est strictement inférieure à 1 .

1°/ Ecrire la matrice de passage P de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$.

2°/ Quelles sont les coordonnées de A_1 dans T ?

3°/ Déterminer une équation de $\mathcal{H}$ dans le repère T .

4°/ Exprimer les coordonnées (X',Y') de $F(M)$ dans T en fonction des coordonnées (X,Y) de M dans T .

Partie C

Etant donnés deux points M et N de $\mathcal{H}$, on définit le point $M*N$ de la façon suivante :

. si $M = N = S$, alors $M*N = S$

. si $M = N = S'$, S' étant le symétrique de S par rapport à O ,
alors $M*N = S$

. si $M = N$, $M \neq S$, $M \neq S'$, on considère la droite Δ_M passant par S et parallèle à la tangente en M à $\mathcal{H}$. Δ_M coupe alors $\mathcal{H}$ en S et en $M*M$.

. si $M \neq N$, on considère la droite $\Delta_{M,N}$ passant par S et parallèle à la droite (MN)

. si $\Delta_{M,N}$ est tangente à $\mathcal{H}$, alors $M*N = S$

. si $\Delta_{M,N}$ n'est pas tangente à $\mathcal{H}$, alors $\Delta_{M,N}$ coupe $\mathcal{H}$ en S et en $M*N$.

1°/ Dans le repère T , calculer l'abscisse de $M*N$ en fonction des abscisses de M et N .

2°/ Prouver que l'ensemble $\mathcal{H}$, muni de $*$,est un groupe isomorphe à $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, muni de la multiplication usuelle .

3°/ Vérifier que : $\forall\ M \in \mathcal{H}$, $F(M) = A_1 * M$.

Partie D

On définit la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de points de $\mathcal{P}$ par :

$$\begin{cases} A_0 = S \\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ A_{n+1} = F(A_n) \end{cases}$$

1°/ Prouver que $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de points de $\mathcal{H} \cap \mathcal{E}$.

2°/ Ecrire les coordonnées $(X_n\ ,Y_n)$ de A_n dans T .

3°/ a) Démontrer l'équivalence :

$$\{\ M \text{ est un point de l'arc } \overset{\frown}{A_n A_{n+1}} \text{ de } \mathcal{H}\ \}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\{\ F(M) \text{ est un point de l'arc } \overset{\frown}{A_{n+1} A_{n+2}} \text{ de } \mathcal{H}\ \}$$

b) En déduire que les points de la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ sont les seuls points de $\mathcal{H} \cap \mathcal{E}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont positives .

4°/ Résoudre , dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation : $x^2 - 5\ y^2 = 1$.