Ecole des Mines d'ALBI-CARMAUX	Ecole des Mines d'ALES	Ecole des Mines de DOUAI	Ecole des Mines de NANTES

MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

PROBLEME I

Les parties II et III sont indépendantes et dans une large mesure indépendantes de la partie I.

PARTIE I

A Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) \neq 0$.

Soit ε une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(1) = 0$.

Pour tout entier naturel n on note $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$ $\quad (I_0 = \int_0^1 f(t)\,dt)$.

Pour tout entier naturel non nul n on note :

$$J_n = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n f(t)\,dt, \quad K_n = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \theta_n = n \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n \varepsilon(t)\,dt.$$

1°) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2°) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n\, J_n) = 0$.

3°) a) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n = 0$.

(On pourra utiliser : $\alpha_n = \sup\limits_{t \in \left[1-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,1\right]} \{|\varepsilon(t)|\}$).

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n\, K_n) = K$ où K est un réel non nul que l'on précisera.

4°) Déduire des questions précédentes un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$.

B Soit f une fonction dérivable de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée est continue, telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$.

Pour tout entier naturel n on note : $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt \qquad \left(I_0 = \int_0^1 f(t)\, dt \right).$

Déterminer un équivalent de I_n, au voisinage de $+\infty$, de la forme $\frac{A}{n^2}$. A étant un réel non nul que l'on précisera.

PARTIE II

Soit f une fonction continue de $[\,0\,;\,1\,]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n on note : $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt \qquad \left(I_0 = \int_0^1 f(t)\, dt \right).$

(A) On suppose : $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Pour tout entier naturel non nul p on note :

$$U_p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} \qquad \text{et} \qquad V_p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

1°) a) Calculer I_0 et I_1.

b) Etablir pour tout entier naturel n une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

2°) a) Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p = U$ où U est un réel que l'on précisera.

b) Donner un équivalent de $(U - U_p)$ au voisinage de $+\infty$.

3°) a) Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} V_p = V$ où V est un réel que l'on précisera.

b) Donner un équivalent de $(V - V_p)$ au voisinage de $+\infty$.

(B) On suppose : $f(t) = \sin(\pi t)$.

Pour tout entier naturel p on note :

$$a_p = (-1)^p \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} \qquad \text{et} \qquad t_p = a_p\, I_{2p}.$$

Pour tout entier naturel non nul p on note :

$$W_p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \frac{\pi^{2k-1}}{(2k)!}$$

1°) Etablir pour tout entier naturel n une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

2°) a) Pour tout entier naturel non nul k exprimer $t_k - t_{k-1}$ en fonction de a_k.

b) Pour tout entier naturel non nul p exprimer t_p en fonction de I_0 et W_p.

3°) Déduire de la question précédente que $\lim\limits_{p \to +\infty} W_p = W$ où W est un réel que l'on précisera.

(On admettra le résultat suivant : $\lim\limits_{p \to +\infty} a_p = 0$)

PARTIE III

Soit f une fonction continue de $[0\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x de $[0, 1[$ et pour tout entier naturel n on note :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n f(t)\,dt \quad \left(I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt\right) \quad \text{et } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} I_k(x).$$

1°) Démontrer que pour tout réel x de $[0, 1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(x) = 0$.

2°) Démontrer que pour tout réel x de $[0, 1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = F(x)$ où $F(x)$ est un réel que l'on exprimera sous forme d'une intégrale faisant intervenir f.

3°) Applications

a) On suppose : $f(t) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

Calculer $F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x)$.

b) On suppose : $f(t) = \sqrt{\dfrac{1 - t}{1 + t}}$.

f est-elle dérivable en 1 ? Calculer $F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x)$.

c) On suppose : $\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{1 - \ln(1 - t)} & \text{si } t \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ (ln désigne le logarithme népérien).

Justifier la continuité de f sur $[0\,;\,1]$; f est-elle dérivable en 1 ?

Calculer $F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x)$.

PROBLEME II

Préambule

Soit $x^3 - x^2 + \mu = 0$ l'équation d'inconnue réelle x où μ désigne un paramètre réel non nul.

a) Déterminer les valeurs de μ pour lesquelles cette équation admet trois racines réelles distinctes.

b) Déterminer les solutions réelles de cette équation lorsque l'une d'entre elles est double.

Dans la suite de ce problème on désigne par :

E un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension trois.

B une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E.

$\vec{u}$ un vecteur de E de composantes a, b et c dans la base B avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

D la droite vectorielle de E orientée par $\vec{u}$.

On notera $<.\ ,\ .>$ le produit scalaire ; $||\ .\ ||$ la norme ; $.\wedge.$ le produit vectoriel, définis dans E.

PARTIE I

Pour tout réel λ non nul, pour tout $\vec{x}$ élément de E, on note f_λ l'application de E dans E définie par : $f_\lambda(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda < \vec{x}, \vec{u} > . \vec{u}$

1°) Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

2°) a) Déterminer la valeur notée λ_o du réel λ telle que f_{λ_o} soit un automorphisme orthogonal de E (ou isométrie vectorielle de E).

b) Caractériser f_{λ_o} par sa matrice relative à la base B.

c) Déterminer l'ensemble des vecteurs de E invariants par f_{λ_o} ; donner alors la nature de f_{λ_o} en précisant ses éléments remarquables.

PARTIE II

Soit g l'endomorphisme de E de matrice associée $G = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ relative à la base B.

1°) Montrer que g est une rotation vectorielle de E si et seulement si a, b et c sont solutions de l'équation $x^3 - x^2 + p = 0$ où p désigne un réel d'un intervalle I de IR que l'on précisera.

(On pourra utiliser l'identité suivante :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left[(a^2+b^2+c^2) - (ab + bc + ac)\right]\ )$$

2°) Lorsque g est une rotation vectorielle de E, avec b et c réels non nuls et égaux, déterminer l'axe et une mesure de l'angle de celle-ci.

PARTIE III

Soit r la rotation vectorielle de E d'axe D et d'angle dont une mesure est un réel θ.

1°) Montrer que pour tout élément $\vec{x}$ de E on a la relation :

$$r(\vec{x}) = <\vec{x}, \vec{u}> . \vec{u} + \cos\theta . [(\vec{u} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{u}] + \sin\theta . (\vec{u} \wedge \vec{x}) \quad \textit{(1)}$$

(On pourra utiliser la relation suivante :

$$(\vec{u} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 . \vec{x} - <\vec{x}, \vec{u}> . \vec{u})$$

2°) Réciproquement montrer que tout endomorphisme de E vérifiant la relation précédente est la rotation vectorielle d'axe D et d'angle de mesure θ.

3°) Soit φ l'endomorphisme de E de matrice Φ relative à la base B telle que :

$$\Phi = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que φ est une rotation vectorielle de E que l'on caractérisera.

4°) Soit ψ le demi-tour vectoriel d'axe D de E. (ou rotation d'axe D et d'angle de mesure π).

a) En utilisant la relation *(1)* expliciter $\psi(\vec{x})$ où $\vec{x}$ est un élément quelconque de E.

b) Construire la matrice de ψ relative à la base B.

(on pourra comparer ψ et f_{λ_0})

PARTIE IV

r désigne la rotation vectorielle de E d'axe D, d'angle dont une mesure est un réel θ.

s désigne la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel P orthogonal à D.

On note $\delta = s \circ r$.

1°) Montrer que si r est différent de l'identité vectorielle de E alors δ est une isométrie vectorielle de E admettant pour seul vecteur invariant le vecteur nul de E. δ est appelée isométrie vectorielle gauche.

2°) Pour quelles valeurs de θ, δ se réduit-elle à s ? à l'homothétie vectorielle de rapport -1 ?

3°) Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout $\vec{x}$ élément de E la relation :

$$f(\vec{x}) = \varepsilon <\vec{x}, \vec{u}> . \vec{u} + \cos\theta . [(\vec{u} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{u}] + \sin\theta . (\vec{u} \wedge \vec{x})$$

avec $\varepsilon = \pm 1$

Montrer que cette relation caractérise les isométries vectorielles de E dont on donnera la classification suivant les valeurs de ε et θ ; on précisera dans chaque cas le rôle de D et la nature de l'ensemble des vecteurs invariants par cette isométrie vectorielle.