CONCOURS COMMUN 2007
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Vendredi 11 mai 2007 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve spécifique.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Barème indicatif : 10 points pour chaque problème

Premier problème

I. Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.

2. Etudier les limites et variations de f (à résumer dans un tableau) ; préciser les branches infinies.

3. Etudier la convexité ; préciser les points d'inflexion éventuels.
4. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de cette fonction relativement à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

   On donne les valeurs approchées suivantes : $e^{-2} \simeq 0,135$, $e^{-1} \simeq 0,36$, $e \simeq 2,72$.

   On précisera les points remarquables utilisés.

II. Calcul d'aires

5. Etant donné un nombre réel h, $h \in]0,1[$, déterminer l'aire $\mathscr{A}(h)$ de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = h$ et $x = 1$.
6. En déduire l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées, c'est à dire $\lim\limits_{h\to 0^+} \mathscr{A}(h)$.

III. Résolution d'une équation différentielle

7. Résoudre l'équation différentielle (E) $\quad x^2y' + (2x-1)y = 0$ sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.
8. Cette équation (E) a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, les préciser.

IV. Dérivées successives et polynômes associés

9. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
10. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

    $\forall x \in]0,+\infty[\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{\frac{-1}{x}}$ et que :

    (1) $\quad P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x] P_n(x)$.
11. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 .
12. Calculer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n .
13. On considère la fonction g telle que $g(x) = x^2 f(x)$.

    Démontrer que $g^{(n+1)} = f^{(n)}$
14. Rappeler la formule de Leibniz relative à la dérivée n-ième d'un produit de fonctions en indiquant les hypothèses.
15. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n)}(x)$, démontrer que :

    (2) $\quad P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x) P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x)$.

16. En déduire que : (3) $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.

17. Déduire de (1) que : (4) $x^2P_n''(x) + (1-2nx)P_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$.

Deuxième problème

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_2[X]$ le sous espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et le polynôme nul. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.

I. Changement de bases et division euclidienne

18. Etant donné trois réels deux à deux distincts a_1, a_2 et a_3, on considère trois polynômes Q_1, Q_2 et Q_3 de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \quad \begin{cases} Q_i(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j \\ Q_i(a_i) \neq 0 \end{cases}$

Démontrer que Q_1, Q_2 et Q_3 sont linéairement indépendants.

19. On pose :

$$\begin{cases} P_1(X) = \dfrac{1}{8}(X-3)(X-5) \\ P_2(X) = \dfrac{-1}{4}(X-1)(X-5) \\ P_3(X) = \dfrac{1}{8}(X-1)(X-3) \end{cases}$$

Calculer $P_i(1)$, $P_i(3)$ et $P_i(5)$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

20. En déduire que $\mathscr{P} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

21. Déterminer la matrice A de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{P}$.

22. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

23. On pose $P_0(X) = (X-1)(X-3)(X-5)$.

Pour tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $\widehat{P}(X)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0 et par f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = \widehat{P}$.

Démontrer que f est linéaire.

24. Déterminer l'image de f.

25. Déterminer le noyau de f.

26. Comparer f^2 et f ; reconnaître f et en donner les éléments caractéristiques.

27. Démontrer que $\hat{P}(X) = P(1)P_1(X) + P(3)P_2(X) + P(5)P_3(X)$.

28. Retrouver ainsi la matrice inverse de A.

II. Calcul matriciel

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

29. Calculer le produit $(M - I)(M - 3I)(M - 5I)$, ainsi que chacun des produits se déduisant par permutation des trois facteurs.

30. On note E l'ensemble des matrices de la forme $aI + bM + cM^2$ avec a, b, c réels.

Démontrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

31. Déterminer la dimension de E.

32. Pour tout polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$, on pose $P(M) = aI + bM + cM^2$ et on note Φ l'application de T dans E définie par $\Phi[P(X)] = P(M)$.

Démontrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

33. On pose $B_i = P_i(M)$ pour $i \in \{1,2,3\}$. En utilisant la question *27.* et le résultat précédent, exprimer I, M et M^2 sous forme de combinaison linéaire de B_1, B_2 et B_3.

34. Déduire de la question *29.* la valeur des produits B_iB_j pour $i \neq j$.

FIN DU SUJET