

Épreuve de Mathématiques (toutes filières)

Jeudi 10 mai 2007 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

PREMIER PROBLÈME

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Partie A — Généralités

1. Prouver que f et g sont C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté g) est dérivable en 0.
3. Faire un tableau de variations de g sur \mathbb{R}_+ , en faire un graphe sachant que $e^{-1} \simeq 0,36$ à 10^{-2} près.
4. Soit H la primitive sur \mathbb{R}_+^* de $t \mapsto g(1/t)$, s'annulant en 1 :
 - 4.a. Calculer H .
 - 4.b. En former un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.
5. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = t/n$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.
 - 5.a. En utilisant la question 3, montrer que (E_n) a une unique solution dans $]0, 1[$, que l'on notera α_n . On montrerait identiquement (mais ce n'est pas à faire) que (E_n) admet une unique solution dans $]1, +\infty[$, que l'on notera β_n .
 - 5.b. Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ et $(\beta_n)_{n \geq 3}$ sont monotones.
 - 5.c. Est-il possible que l'une des deux suites converge vers une limite $l > 0$? En déduire leurs limites.

Partie B — Étude d'une courbe paramétrée

On étudie ici, dans un repère orthonormal d'origine O , la courbe paramétrée définie sur \mathbb{R}_+^* par le point $M(t)$ de coordonnées

$$\text{données } \begin{cases} x(t) = f(t) = \frac{\exp(-1/t)}{t^2} \\ y(t) = g(t) = \frac{\exp(-1/t)}{t} \end{cases}$$

6. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $M(t)$ se situe sur la première bissectrice du plan d'équation cartésienne $y = x$.
7. Étudier la limite de la pente de la droite $(OM(t))$ lorsque t tend vers 0^+ et $+\infty$.
8. En utilisant la question 3, faire un tableau de variation de x et y sur \mathbb{R}_+^* avec limites aux bornes 0^+ et $+\infty$.
9. En utilisant les deux questions précédentes, tracer la courbe en repérant les tangentes verticales ou horizontales, on pourra utiliser que $4e^{-2} \simeq 0,54$ à 10^{-2} près.

Partie C — Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à \mathbb{R}_+ en posant $f(0) = 0$.

10. Montrer que l'application f ainsi prolongée est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ ; préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question 1 reste valable pour $t = 0$.
11. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

11.a. Justifier l'existence de ces intégrales que l'on ne cherchera surtout pas à calculer puis montrer que

$$F(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x).$$

11.b. En séparant l'intégrale $G(x)$ en deux, montrer qu'il existe une constante C réelle telle que pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq G(x) \leq C + \ln(x).$$

11.c. En déduire que $G(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

12. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $(E) : x^2 y' + y = x^2$, l'expression générale de la solution fera apparaître la fonction F .

Partie D — Étude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de $(E) : x^2 y' + y = x^2$ cette fois sur \mathbb{R}_+ , de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+ . Nous allons, sans aucun calcul explicite de y , déterminer entièrement la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E) .

13. Que vaut $u_0 = y(0)$?
14. En dérivant (E) , calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.
15. Peut-on avoir y de la forme : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$?
16. Soit n un entier naturel.

16.a. On suppose ici $n \geq 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.$$

En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1} .

16.b. Donner une expression de u_n utilisant une factorielle, valable pour tout $n \geq 2$; en déduire les développements limités (dont on justifiera l'existence) de y à tout ordre au voisinage de 0.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace usuel dont on notera \mathcal{E} l'ensemble des points, E l'ensemble des vecteurs et $\vec{0}$ le vecteur nul. \mathcal{E} est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, toutes les équations de l'énoncé seront relatives aux éléments de ce repère. Si $M \in \mathcal{E}$ et $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ on pourra noter $M = (x, y, z)$ et $\vec{OM} = (x, y, z)$.

On considère les ensembles P et Q d'équations cartésiennes :

$$P : x + z = 0, \quad Q : x + y + z - 3 = 0.$$

Partie A — Étude d'un mouvement dans l'espace

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on introduit le point $N(t)$ de \mathcal{E} caractérisé dans \mathcal{R} par les coordonnées

$$\begin{cases} a(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \\ b(t) = \sin(t) \\ c(t) = \frac{-\cos(t)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

1. Prouver que $N(t)$ appartient au plan P .
2. Donner une équation paramétrique de la droite D intersection de P et Q . Est-il possible que $N(t) \in D$?
3. Calculer $a^2(t) + b^2(t) + c^2(t)$. En déduire que $N(t)$ appartient à un cercle de P dont on précisera le centre et le rayon.
4. Calculer la distance de $N(t)$ à la droite D puis au plan Q , on pourra vérifier que leur rapport est constant.
5. Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R} : \exp(it) + \exp(i(t + 2\pi/3)) + \exp(i(t - 2\pi/3)) = 0$.
6. En déduire l'isobarycentre des points $N(t), N(t + 2\pi/3), N(t - 2\pi/3)$.

Partie B — Construction d'un polynôme

On fixe maintenant $t \in \mathbb{R}$ et on note

$$\begin{cases} s(t) = a(t) + b(t) + c(t) \\ d(t) = a(t)b(t) + a(t)c(t) + b(t)c(t) \\ p(t) = a(t)b(t)c(t) \end{cases}.$$

7. Simplifier $s(t)$.
8. Linéariser le produit de fonctions trigonométriques $p(t)$.
9. Calculer $d(t)$ de deux manières différentes — on pourra utiliser un résultat de la question 3.
10. On considère maintenant le polynôme $R(X) = (X - a(t))(X - b(t))(X - c(t))$, dont les racines sont donc $a(t), b(t)$ et $c(t)$:
 - 10.a. Dans cette question seulement $t = \pi/2$. Montrer *sans calculer* $R(X)$ ni $R'(X)$ que $R'(0) = 0$.
 - 10.b. Exprimer maintenant $R(X)$ en fonction de $s(t), d(t), p(t)$, puis en fonction des résultats des questions précédentes.

Partie C — Endomorphismes à noyau imposé

11. Montrer que P définit un plan vectoriel de E .
12. Est-ce le cas pour Q ? Préciser, sans preuve, la structure algébrique de Q .

13. On introduit les vecteurs :

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k}), \vec{j}' = \vec{j}, \vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}).$$

Montrer que (\vec{i}', \vec{j}') est une base orthonormale de P et que \vec{k}' en est un vecteur normal. En déduire que $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une base orthonormale de l'espace.

14. On désigne par $\vec{a} \cdot \vec{b}$ le produit scalaire de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} . Soit $\vec{e} \in E$. Prouver, autrement que par « c'est du cours », que ses coordonnées dans la base B' sont données par :

$$\vec{e} = (\vec{e} \cdot \vec{i}') \vec{i}' + (\vec{e} \cdot \vec{j}') \vec{j}' + (\vec{e} \cdot \vec{k}') \vec{k}'$$

15. On considère ici une application linéaire $u : E \rightarrow E$ telle que $P \subset \ker(u)$.

15.a. Prouver qu'il existe $\vec{z} \in E$ tel que $u(\vec{e}) = (\vec{e} \cdot \vec{k}') \vec{z}$ pour tout $\vec{e} \in E$.

15.b. Réciproquement, montrer qu'une application u donnée par la formule précédente est un endomorphisme de E tel que $P \subset \ker(u)$.

15.c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur \vec{z} pour que $P = \ker(u)$. Donner dans ce cas le rang et l'image de u .

Partie D — Matrices de projecteur

On note ici $p : E \rightarrow E$ le projecteur orthogonal sur le plan P , B la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ la base introduite à la question 13. On introduit les matrices :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier très rapidement que M' est la matrice de p dans la base B' .

17. Donner la matrice de passage P de la base B à la base B' ainsi que son inverse — on détaillera le raisonnement pour cette dernière.

18. Soit M la matrice de p dans la base B :

18.a. Justifier *sans calcul* que $M^2 = M$.

18.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(M + I)^n = I + (2^n - 1)M.$$

18.c. Exprimer M en fonction de P, P^{-1} et M' . Ensuite, calculer explicitement M .

19. On peut traiter cette partie sans avoir trouvé explicitement M . On introduit l'ensemble \mathcal{M} des matrices du type $M_{a,b} = aM + bI$, où a et b sont réels :

19.a. Montrer que l'ensemble \mathcal{M} muni des lois usuelles sur les matrices a une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

19.b. Les réels a et b étant donnés, exprimer $M_{a,b}$ en fonction de P, P^{-1}, I et M' . En déduire une forme factorisée du déterminant de $M_{a,b}$ ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit inversible.

19.c. Déterminer les réels e et f tels que $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$.

19.d. Lorsque $M_{a,b}$ est inversible, exprimer son inverse sous la forme d'un élément de \mathcal{M} .

FIN DE L'ÉPREUVE