CONCOURS COMMUN 2006
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Jeudi 11 mai 2006 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

PREMIER PROBLÈME

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. On notera $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\times$ désigne la multiplication des matrices.
$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des complexes. On notera $|z|$ le module d'un complexe z.
Les différentes parties de ce problème ont un lien entre elles mais peuvent être traitées séparément.

Étude d'une fonction.

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible, $f(z)=\dfrac{z^2}{z-2i}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f
2. **a.** Déterminer les racines carrées complexes de $8-6i$.
   b. En déduire tous les antécédents de $1+i$ par f .
3. Soit h un complexe. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f .
4. Déterminer l'image $f(D)$ de D par f . La fonction f est-elle une application surjective de D dans $\mathbb{C}$?
5. f est elle une application injective de D dans $\mathbb{C}$?

Soit g l'application définie sur D à valeur dans $\mathbb{C}$ et telle que :

$$\forall z \in D,\ g(z)=|z-2i|^2 \frac{z^2}{z-2i}+z^3$$

6. Soit z un complexe appartenant à D de partie réelle x et de partie imaginaire y. Trouver la partie réelle et la partie imaginaire de $g(z)$. Montrer en particulier que la partie réelle de $g(z)$ est : $2x^3-2xy^2-4xy$.

Soit le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Soit Γ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $g(z)$ est un imaginaire pur.

7. Montrer que Γ est inclus dans la réunion d'une droite Δ et d'une conique C. Préciser Γ.

8. Déterminer la nature de C. Préciser le centre et les axes de C. Déterminer l'excentricité de C ainsi que les coordonnées de ses foyers dans le repère R.

Étude d'un polynôme.

Soit a un entier naturel. Soit P_a la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ P_a(t)=t^3-t(a^2+2a)+2$.

Le but de cette partie est de trouver a tel que P_a possède trois racines dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que a existe. Soient t_1, t_2, t_3 les 3 racines de P_a avec $t_1 \le t_2 \le t_3$.

9. Que valent $t_1+t_2+t_3$ et $t_1\, t_2\, t_3$?

10. Calculer $P_a(0)$ et en déduire que $t_1<0$.

11. Déduire du 9. et du 10. que $t_1 \le 0 \le t_2 \le t_3 \le -t_1$ puis les valeurs de t_1, t_2, t_3.

12. Montrer que $P_a'(t_2)=0$. En déduire la valeur de a.

13. Réciproquement, montrer que la valeur de a ainsi trouvée convient bien.

Étude de deux ensembles de matrices.

Soit (x,y) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note $M_{x,y}$ la matrice $\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$.

Soit Σ le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{R})$ tel que $\Sigma=\{ M_{x,y}, (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

14. Quelle relation doivent vérifier x et y pour que la matrice $M_{x,y}$ ne soit pas inversible ?

Calculer le produit $M_{x,y}\times M_{-x,y}$. En déduire l'inverse de $M_{x,y}$ lorsqu'il existe.

15. Σ est-il un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$? On justifiera sa réponse.

Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $J=\{A+M_{x,y},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

16. Montrer que J est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.

17. Quelle est la dimension de J ? Déterminer une base de J.

18. Montrer que la loi $\times$ est interne dans J.

Étude d'une application de $M_2(\mathbb{R})$.

Soit B une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{R})$. Soit φ_B l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ qui à la matrice X associe la matrice $\varphi_B(X)=B\times X$.

19. Montrer que φ_B est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.

20. On suppose dans cette question que $B=M_{2,1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

20.a φ_B est elle surjective ? Bijective ?

20.b . Déterminer la matrice de φ_B dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

On rappelle que la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est constituée des matrices

$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ où $E_{1,1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{1,2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{2,1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $E_{2,2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

21. On prend dans cette question $B = M_{0,-2}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. φ_B est elle surjective ? Bijective ?

DEUXIÈME PROBLÈME.

Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_n(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}-\dfrac{x}{n}$. On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_0(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$.

Généralités sur f_n.

Soit n un entier naturel fixé.

1. Déterminer le domaine de définition D de f_n.

2. f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.

3. f_n est-elle 2π-périodique ?

4. Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0,\pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier. On justifiera sa réponse.

Étude de la fonction f_0.

5. Étudier la dérivabilité de f_0 sur D. Déterminer l'expression de sa dérivée.

6. Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0,\pi]$.

7. Déterminer le tableau de variations sur $[0,\pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{R}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
On rappelle que : $\sqrt{3}$ a pour valeur 1,732 comme valeur approchée par défaut à 10^{-3} près.

8. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Utilisation d'une primitive de f_0.

9. Déterminer une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{2-\cos t}\,dt$.

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(x)+\dfrac{\sin x}{2-\cos x}y(x)=2\sin x$.

10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E).

11. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x\mapsto a\cos(x)+b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

12. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie : $h(0)=1$.

Étude d'une courbe polaire.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit Γ la courbe définie par l'équation polaire : $\rho = \dfrac{\sin\theta}{2-\cos\theta}$. Pour tout réel θ on notera $\vec{u}_\theta$ le vecteur $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $M(\theta)$ le point du plan tel que $\overrightarrow{OM(\theta)} = \dfrac{\sin\theta}{2-\cos\theta}\vec{u}_\theta$.

13. Soit un élément θ de D. Montrer qu'il existe une symétrie s telle que $s(M(\theta)) = M(-\theta)$.

14. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point $M(\frac{\pi}{2})$.

15. Tracer l'allure de la courbe Γ.

Étude de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x(2-\cos x)}$.

16. Déterminer le domaine de définition de g.

17. Montrer que g admet une limite finie l en 0.

On prolonge g par continuité en posant : $g(0)=l$.

18. Déterminer le développement limité en 0 d'ordre 3 de g ainsi prolongée.

19. Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

On admet que g est dérivable sur $]0,\pi]$ et que pour tout x de $]0,\pi]$, $g'(x)$ est strictement négatif.

20. Montrer que g est une bijection entre $[0,\pi]$ et un ensemble I à définir. On notera h sa réciproque.

Étude d'une suite qui annule f_n.

Soit n un entier naturel non nul.

21. Montrer que si a est un réel strictement positif qui annule f_n, alors a appartient à l'intervalle $[0, n\sqrt{3}\,]$.

22. Montrer qu'il existe un unique réel x_n appartenant à $[0,\pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

23. Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN DE L'ÉPREUVE