CONCOURS COMMUN 2005
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Jeudi 19 mai 2005 de 14h00 à 18h00

Instructions générales:

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

PROBLÈME D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

Les quatre parties **A, B, C, D** de ce problème sont totalement indépendantes entre elles.

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace et E l'ensemble des vecteurs de l'espace. Les différentes coordonnées et équations qui apparaissent dans l'énoncé sont relatives au repère $\mathcal{R}$.

Si $\overrightarrow{X} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$, on pourra aussi noter $\overrightarrow{X} = (x, y, z)$.

Si α, β et δ sont trois réels fixés et si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs fixés de E, on note f l'application linéaire de E dans E définie pour tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E par

$$f\left(\overrightarrow{X}\right) = \alpha\left(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{X} + \delta\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{w}$$

A - Etude de l'intersection de deux plans mobiles et d'un plan fixe

On note D' la droite passant par O dirigée par $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, D la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = z \\ x = 1 \end{array}\right.$, Q le plan d'équation $y + z = 0$ et enfin, pour tout réel m, P_m est le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

A - 1) Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n_m}$ de P_m ainsi qu'un point et un vecteur directeur de D.

Vérifier que tous les plans P_m contiennent la droite D.

A - 2) Calculer $\overrightarrow{r_m} = \overrightarrow{n_m} \wedge \overrightarrow{a}$. En déduire que D' n'est pas orthogonale à P_m. On appelle alors R_m l'unique plan contenant D' et perpendiculaire à P_m. Obtenir une équation cartésienne de R_m.

A - 3) Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de I_m point d'intersection des plans P_m, Q et R_m.

A - 4) On note (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$ et Ω le point de Q de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

Préciser la nature géométrique de (S) ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.

A - 5) Vérifier que I_m appartient à (S) puis que I_m appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

A - 6) Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathcal{E}$ par lesquels passe un et un seul plan P_m.

Quelle est la réunion des plans P_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

B - Etude d'un exemple d'application f

Dans cette partie **B**, on prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} - 5\,\overrightarrow{i}$, $\alpha = 3, \beta = -3$ et $\delta = 1$.

B - 1) Vérifier que $f(x, y, z) = (4y + 2z, d, e)$ où l'on exprimera d et e en fonction de x, y et z.

B - 2) Déterminer une base et la dimension du noyau de f. f est-il un automorphisme de E ?

B - 3) Enoncer complètement le théorème du rang. Obtenir le rang de f.

B - 4) Montrer, dans le cas général, que si φ est une application linéaire définie sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel G où G est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$, alors l'image de φ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2})$ et $\varphi(\overrightarrow{e_3})$.

B - 5) Déterminer une base de l'image de f.

B - 6) Montrer que $B' = \left(f\left(f\left(\overrightarrow{i}\right)\right), f\left(\overrightarrow{i}\right), \overrightarrow{i}\right)$ est une base de E.

Obtenir ensuite la matrice A' de f dans B'.

B - 7) Sachant que la matrice de passage P de la base B' à la base $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est l'une des deux matrices suivantes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{pmatrix} ; P_2 = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 32 & 32 & -16 \end{pmatrix}$$

préciser, en argumentant votre choix, laquelle est P.

Donner le lien matriciel reliant $A = M_B(f)$ à $A' = M_{B'}(f)$.

C - Etude d'un deuxième exemple

Dans cette partie **C**, on prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \alpha = -3, \beta = 5$ et $\delta = 0$.

On admet qu' alors $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

On rappelle que, par convention, on note $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

C - 1) Prouver, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, on peut trouver deux réels (qu'on notera a_n et b_n) tels que

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

On obtiendra ainsi les relations définissant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

C - 2) En utilisant les relations précédemment trouvées, vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} - b_{n+1} - 20b_n = 0$.

C - 3) En déduire la valeur de b_n puis celle de a_n en fonction de n.

C - 4) Vérifier que M^2 est combinaison linéaire de M et de la matrice I_3.

En déduire que M est inversible et expliciter les coefficients de la matrice M^{-1}.

D - Etude d'un troisième cas

Dans cette partie **D**, on prend $\beta = \delta = 0$. On renomme alors g l'application f de l'introduction, soit

$$\forall \overrightarrow{X} \in E, g\left(\overrightarrow{X}\right) = \alpha\left(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{v}$$

où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls fixés de E et où α est un réel non nul.

D - 1) Vérifier que si $\alpha\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) = 1$, alors g est un projecteur.
Démontrer ensuite que si g est un projecteur, alors $\alpha\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) = 1$.

D - 2) On suppose que $\alpha\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right) = 1$. On note $F_1 = \left\{\overrightarrow{X} \in E \;/\; \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{X} = 0\right\}$ et $F_2 = \left\{\lambda\overrightarrow{v} / \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Vérifier que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E (l'écriture $\overrightarrow{x} = \left(\overrightarrow{x} - g\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + g\left(\overrightarrow{x}\right)$ pourra être utile).

Sur quel espace vectoriel parallèlement à quel autre g est-elle alors la projection ?

D - 3) A l'aide des deux questions précédentes, trouver la matrice Π_B dans la base $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de la projection p sur $P = \left\{\overrightarrow{X} = (x, y, z) \in E / x + y + z = 0\right\}$ parallèlement à la droite D engendrée par $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} - 5\,\overrightarrow{i}$.

PROBLÈME D' ANALYSE

A - Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon

A - 1) Obtenir l'ensemble de définition D de f.

A - 2) f est-elle dérivable en 0 ?

A - 3) Justifier que f est de classe C^1 sur $[0\,;1[$.

A - 4) Dresser le tableau de variations de f.

On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

B - Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$

B - 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.

B - 2) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

B - 3) Montrer que $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

B - 4) Enoncer l'inégalité des accroissements finis.

B - 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

B - 6) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

C - Etude de la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x\ln(x)}$

C - 1) On admet que, sur $D\setminus\{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2\ln^2(x)}h(x)$ avec $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Etudier les variations de g.

C - 2) Déterminer la limite de g en 1.

C - 3) Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f.
Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives de f et de g ainsi que par les droites d'équation $x = 2$ et $x = e$.

D - Tracé d'une courbe paramétrée

On considère (Γ) la courbe donnée par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ pour t décrivant $D\setminus\{0\}$.

D - 1) Déterminer les asymptotes de (Γ) ainsi que la position relative de (Γ) par rapport à celles-ci.

D - 2) Tracer la courbe (Γ) en précisant la tangente au point de paramètre $t = e$.

E - Solutions d'une équation différentielle

On note (E_1) l'équation différentielle $-x^2z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.
On recherche les fonctions z solutions de (E_1) sur $K =]1\,;+\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K.

E - 1) On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2).

E - 2) Résoudre (E_2) sur K. On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a : x \longmapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$.
Vérifier que, pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K. On a donc ainsi $z(x) = \dfrac{x}{\ln(ax)}$.

E - 3) Pour $a > 0$, on note (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$.

Montrer que (C_a) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre 0 dont on précisera le rapport.

F - Etude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

On pose $H(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

F - 1) Déterminer l'ensemble de définition J de H.

F - 2) Etudier la limite de H en 0.

F - 3) Justifier qu'il existe un réel a dans $]0\,;1]$ tel que

$$\forall x \in [a\,;1[,\ \frac{3}{2}(x-1) \leq \ln(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

En déduire la limite de H à gauche en 1.

FIN DU SUJET