CONCOURS COMMUN 2004
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Mardi 18 mai 2004 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

ANALYSE

PREMIERE PARTIE

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.
On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.

2. Intégrer (E) sur I.

Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

3. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

DEUXIEME PARTIE

4. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{1-x})e^{\frac{1}{1-x}}$ pour tout réel x appartenant à I.

La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et X . Expliciter cette relation.

5. Préciser P_0 , P_1 , P_2 et P_3.

6. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2]\, P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

TROISIEME PARTIE

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

7. Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.

8.

a) Préciser, sans nouveau calcul : a_0 , a_1 , a_2 , a_3. En déduire a_4.

b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

9. On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.

En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e.

p et n désignant des entiers naturels quelconques, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i\,!)^2}$$

10.

a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geq 1$.

b) Prouver que les suites $p \to S_p(0)$ et $p \to S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.

11. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

12. En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p \to S_p(n)$ converge.

13. Prouver que : $a_n = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim\limits_{p\to+\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} . \frac{1}{i!}$

FIN DU PROBLEME D'ANALYSE

ALGEBRE ET GEOMETRIE

PREMIERE PARTIE

Soient I et J les matrices définies par : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\vec{E}$ désigne l'espace vectoriel usuel orienté muni d'une base orthonormée directe $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit : f l'endomorphisme de $\vec{E}$ défini par sa matrice J relativement à la base B et $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

1. Calculer $f(\vec{u})$ et prouver que le plan Q d'équation : $x + y + z = 0$ est stable par f (c'est-à-dire que l'image par f de tout vecteur de Q appartient à Q).

2. On pose $\vec{v} = \vec{i} + \frac{1}{2}(-\vec{j} - \vec{k})$ et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

a) Vérifier que $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base du plan Q.

b) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base orthonormée directe de $\vec{E}$?

c) Trouver un réel θ tel que : $f(\vec{v}) = \cos(\theta)\,\vec{v} + \sin(\theta)\,\vec{w}$ et $f(\vec{w}) = -\sin(\theta)\,\vec{v} + \cos(\theta)\,\vec{w}$.

d) Que pensez vous de la nature géométrique de la restriction de f à Q ?

DEUXIEME PARTIE

Pour tout vecteur $\vec{t} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on note $[\vec{t}] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ la matrice de $\vec{t}$ relativement à la base B.

On définit ainsi les matrices colonnes à coefficients complexes $X_1 = \sqrt{3}\,.\,[\vec{u}]$, $X_2 = [\vec{v}] + i\,[\vec{w}]$ et $X_3 = [\vec{v}] - i\,[\vec{w}]$ et on désigne par P la matrice carrée d'ordre 3 : $P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}$

3.

a) Exprimer les coefficients non réels de P en fonction de j et j^2.

(On rappelle que j désigne le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

b) Soit $\overline{P}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. Exprimer le produit $P.\overline{P}$ en fonction de la matrice I.

4.

a) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer JX_i en fonction de X_i.

b) En déduire une matrice diagonale Δ telle que : $P\Delta = JP$.

5.

a) Prouver que l'ensemble $C(J) = \{ M \in M_3(\mathbb{C}) / MJ = JM \}$ des matrices M qui commutent avec J est le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$ engendré par I, J et J^2.

b) Donner une base et la dimension de C(J).

6. a, b et c désignant des nombres complexes quelconques, on note : $M(a, b, c) = aI + bJ + c\, J^2$.

a) Calculer la matrice $D(a, b, c) = P^{-1} M(a, b, c) P$, en utilisant le résultat de la question 4.b).

b) Calculer de façon indépendante les déterminants de M(a, b, c) et D (a, b, c).

c) En déduire que l'expression : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, est le produit de trois expressions de la forme $\alpha a + \beta b + \gamma c$ où α, β et γ représentent des nombres complexes à préciser.

d) On suppose que a, b, c sont distincts et on considère ces nombres comme les affixes respectives des sommets A, B, C d'un triangle (T) dans un plan complexe d'origine O.
Prouver que la matrice M(a, b, c) est singulière (autrement dit : non inversible) si et seulement si (T) est équilatéral ou si O est son centre de gravité.

TROISIEME PARTIE

On reprend les notations de la question précédente et on construit par récurrence une suite(T_n) de triangles de sommets A_n , B_n et C_n en posant :

.) $(T_0) = (T)$.

.) λ désignant un nombre réel, pour tout entier naturel n, (T_{n+1}) est le triangle dont les sommets A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1} sont tels que :

A_{n+1} est le barycentre des points pondérés (B_n, λ) et $(C_n, 1-\lambda)$,
B_{n+1} est le barycentre des points pondérés (C_n, λ) et $(A_n, 1-\lambda)$,
C_{n+1} est le barycentre des points pondérés (A_n, λ) et $(B_n, 1-\lambda)$.

On note : a_n, b_n et c_n les affixes respectives des sommets A_n , B_n et C_n

$$Y_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z_n = P^{-1} . Y_n$$

7. Prouver que pour tout entier n : $Z_{n+1} = D(0, \lambda, 1-\lambda). Z_n$.

8. Expliciter les coefficients de la matrice $(D(0, \lambda, 1-\lambda))^n$.

9.

a) On admet qu'une suite géométrique non nulle de raison complexe q converge si et seulement si $q = 1$ ou $|q| < 1$.

Prouver que la suite définie pour tout entier n par $(\lambda\, j + (1-\lambda)\, j^2)^n$ converge si et seulement si λ appartient à un intervalle à préciser.

b) Prouver que si cette condition est réalisée, les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) convergent.

10.

a) Exprimer $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de $a_n + b_n + c_n$.

b) Prouver que les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) ont même limite.

c) Exprimer cette limite en fonction de a , b et c.

FIN DU PROBLEME D'ALGEBRE ET GEOMETRIE - FIN DU SUJET