

CONCOURS COMMUN 2003

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Jeudi 22 mai 2003 de 8h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend : 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Barème indicatif :

Premier problème environ 1/2 - Deuxième problème environ 1/2

Premier problème

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R} le corps des nombres réels.

Dans tout le problème α désigne un réel strictement supérieur à 1.

On pose : $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha} dx$.

L'objectif du problème est le calcul de l'intégrale $I(\alpha)$.

On rappelle que pour a et b dans \mathbb{R} on a les formules :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I. Quelques résultats préliminaires

Pour x dans \mathbb{R} et pour n dans \mathbb{N}^* on pose : $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

Pour $x \in]0, \pi]$ et pour n dans \mathbb{N} on pose : $g_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

1) Etablir la formule : $\forall x \in]0, \pi], f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x)$.

On pourra, pour ce faire, s'intéresser à la quantité $\sin\left(\frac{x}{2}\right)f_n(x)$.

2) a) En déduire que g_n est prolongeable en une application continue sur $[0, \pi]$.

On note encore g_n l'application ainsi prolongée.

b) Pour n dans \mathbb{N} on pose : $u_n = \int_0^\pi g_n(x) dx$.

Montrer que la suite (u_n) est constante et préciser sa valeur.

3) Soit $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0, \pi], g(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $g(0) = 0$.

a) Prouver que g est continue en 0.

b) Etablir l'existence et déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g'(x)$.

c) Etablir que g est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ et préciser $g'(0)$.

II. Etude d'une suite

Pour n dans \mathbb{N}^* on pose : $X_n = \int_0^\pi f_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx$.

4) Pour n dans \mathbb{N} on pose $v_n = \int_0^\pi g(x) \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) dx$.

Montrer qu'il existe A dans \mathbb{R} tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| \leq \frac{A}{2n+1}$.

On pourra, pour ce faire, effectuer une intégration par parties.

5) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}v_n + \frac{\pi}{2}$.

Montrer que la suite (X_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\frac{1}{1+\alpha k} + \frac{1}{1-\alpha k} \right]$.

III. Détermination de la valeur de $I(\alpha)$

On adopte la notation $\beta = \frac{1}{\alpha}$ et pour $t \in]0, 1]$ on pose : $\varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t}$ et $\psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$.

7) a) Justifier l'existence de $I(\alpha)$.

b) Montrer que les applications φ et ψ sont intégrables sur $]0, 1]$.

Dans toute la suite on pose : $J(\beta) = \int_0^1 \varphi(t) dt$ et $K(\beta) = \int_0^1 \psi(t) dt$.

8) a) Montrer que : $\forall a \in]0,1[$, $\int_a^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta \int_{a^\alpha}^1 \varphi(t) dt$. On pourra poser $t = x^\alpha$.

En déduire la formule : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta J(\beta)$.

b) Montrer que : $\forall A \in]1,+\infty[$, $\int_1^A \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta \int_{A^{-\alpha}}^1 \psi(t) dt$.

En déduire la formule : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta K(\beta)$.

9) Pour n dans \mathbb{N} et t dans \mathbb{R} on pose : $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k$.

Pour n dans \mathbb{N}^* et t dans $]0,1[$ on pose : $\varphi_n(t) = \sigma_n(t) t^{\beta-1}$ et $\psi_n(t) = \sigma_{n-1}(t) t^{-\beta}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \left| \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| \leq t^{n+1}$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,1[, |\varphi_n(t)| \leq 2\varphi(t)$ et $|\psi_n(t)| \leq 2\psi(t)$.

c) Montrer que pour tout n dans \mathbb{N}^* φ_n et ψ_n sont intégrables sur $]0,1[$.

10) Pour n dans \mathbb{N}^* on pose : $J_n(\beta) = \int_0^1 \varphi_n(t) dt$ et $K_n(\beta) = \int_0^1 \psi_n(t) dt$.

a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(\beta) = J(\beta)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(\beta) = K(\beta)$.

b) Exprimer $J_n(\beta) + K_n(\beta)$ à l'aide de X_n et de α .

c) Montrer que : $I(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$.

Second Problème

\mathbb{R} désigne le corps des nombres réels et \mathbb{C} le corps des nombres complexes.

$M_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans \mathbb{C} .

On pose : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ et $L = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$.

I. Etude d'une symétrie

On notera bien, que dans toute cette partie, $M_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de \mathbb{C} -algèbre.

Pour $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{C})$ on pose : $\sigma(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ et $\tau(A) = a + d$.

11) a) Montrer que σ est une symétrie du \mathbb{C} -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.

b) Etablir que (I, J, K, L) est une base du \mathbb{C} -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ puis donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.

12) On considère A et B dans $M_2(\mathbb{C})$.

a) Montrer que : $\sigma(AB) = \sigma(B) \sigma(A)$.

b) Justifier l'égalité : $A\sigma(A) = \det(A) I$.

c) Montrer que si A est inversible alors $\sigma(A)$ l'est aussi.

Exprimer les matrices $\sigma(A)^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A .

- 13) a) Vérifier que τ est une forme linéaire sur le \mathbb{C} -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.
 b) Soit A dans $M_2(\mathbb{C})$. Exprimer $\sigma(A)$ à l'aide des matrices A, I et du complexe $\tau(A)$.

II. Une \mathbb{R} -algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

On notera bien, que dans toute cette partie, $M_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de \mathbb{R} -algèbre.

A tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes on associe la matrice $M(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$.

On désigne par H l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(z_1, z_2)$, le couple (z_1, z_2) décrivant \mathbb{C}^2 .

- 14) a) Montrer que toute matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.
 b) En déduire que H est un sous espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.
 Préciser une base et la dimension du \mathbb{R} -espace vectoriel H .
 c) Montrer que H est stable pour le produit matriciel.
 d) Montrer que H est une \mathbb{R} -algèbre. La \mathbb{R} -algèbre H est-elle commutative ?
- 15) a) Vérifier que : $\forall A \in H, \sigma(A) \in H$ et $\det(A) \in \mathbb{R}^+$.
 b) Montrer qu'une matrice non nulle de H est inversible et que son inverse est dans H .
 c) Vérifier que $(H \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe.
- 16) Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous deux s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels alors il en est de même de leur produit.
 On pourra exprimer $\det(M(z_1, z_2))$ comme une somme de quatre carrés de réels.

III. Un produit scalaire et une projection orthogonale

Pour A et B dans H on pose : $(A | B) = \frac{1}{4} \tau(A\sigma(B) + B\sigma(A))$.

- 17) On considère A et B dans H .
 a) Prouver que $(A | B) \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser la question 5)a).
 b) Montrer que $(A | A) = \det(A)$.
 c) Etablir que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel H .
- 18) Vérifier que (I, J, K, L) est une base orthonormale de H .
- 19) On pose $F = \{A \in H \mid \tau(A) = 0\}$.
 a) Montrer que F est un hyperplan du \mathbb{R} -espace vectoriel H . En donner une base.
 b) Montrer que : $F^\perp = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{R}\}$.
 c) On désigne par π la projection orthogonale sur F .
 Montrer que : $\forall A \in H, \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A))$.

FIN DU SUJET