

CONCOURS COMMUN SUP 2001 DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

vendredi 18 mai 2001 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend : 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

PROBLEME 1

Dans tout ce problème, a désigne un réel.

On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.

Le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou u .

La partie I étudie le cas où P est constant.

La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.

La partie III étudie le cas où $a = 1$.

Partie I :

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\}$.

1) Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} = au_n + b$. Montrer l'unicité de b . On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2) a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

2) b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3) Montrer que $E_a^{(0)}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

4) Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de \mathbb{N} , $x_n = 1$) et soit y la suite définie, pour tout n de \mathbb{N} , par : $y_n = a^n$.

Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y .

5) Soit $u \in E_a^{(0)}$.

5) a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$.

5) b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de \mathbb{N} ,

$$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

5) c) Que peut-on en conclure ?

6) Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II :

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.

On fixe un entier naturel p . On note $\mathbb{R}_p[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.

On pose $E_a^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)\}$.

1) Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$$

Montrer l'unicité de P (on pourra étudier l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans \mathbb{R}^{p+1} définie par :

$$\varphi(P) = (P(0), P(1), \dots, P(p)).$$

On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2) Montrer que $E_a^{(p)}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

3) Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4) Déterminer $\text{Ker } \theta$ (noyau de θ).

5) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X + 1)^k - aX^k$.

5) a) Quel est le degré de Q_k ?

5) b) Montrer que la famille (Q_0, Q_1, \dots, Q_p) est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6) a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \dots, p\}$, Q_k est dans l'image de θ , notée $\text{Im } \theta$.

6) b) Que peut-on en conclure ?

7) Dédurre des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

8) Pour $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de \mathbb{N} , par : $x_n^{(k)} = n^k$.

On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de \mathbb{N} , par : $y_n = a^n$.

Montrer que $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

9) Application : déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

Partie III :

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

1) En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + P(n)\}$$

2) Application : déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

PROBLEME 2

Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en un nombre fini de points.

On suppose par ailleurs que φ possède une limite l (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \quad \int_x^y \varphi(t) dt = 1$$

La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f .

La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $l \neq 0$.

La partie III étudie des propriétés de la fonction f .

La partie IV illustre les parties II et III sans calcul explicite de f .

Partie I :

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle \exp .

1) Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
On montrera que $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

2) Etudier les variations de f sur \mathbb{R} . Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.

3) Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} représentant f . Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.

4) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage de 0.

En déduire l'équation de la tangente en 0 à \mathcal{C} et la position locale de la courbe \mathcal{C} par rapport à celle-ci.

5) Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C} dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II :

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t) dt$.

On rappelle que Φ_x est dérivable sur \mathbb{R} et que pour u réel, $\Phi_x'(u) = \varphi(u)$.

1) Dans cette question seulement, φ est définie, pour tout t réel, par : $\varphi(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.

- 1) a) Montrer que pour x et y réels, $\int_x^y \varphi(t) dt < 1$.
- 1) b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.
- 1) c) Que vaut ℓ ?

Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.

- 2) Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x .
 - 3) a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur \mathbb{R} . Que peut-on en conclure ?
 - 3) b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, $\varphi(t) \geq A$.
- On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.
- 3) c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geq x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.
 - 3) d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique.

Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x) .

Partie III :

- 1) Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$ (on pourra admettre les résultats de la question II) 3)).
- 2) En déduire que f est continue strictement croissante sur \mathbb{R} .
- 3) a) On suppose dans cette question a), que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et pour x réel, montrer que : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$.
- 3) b) On suppose dans cette question b), qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule. Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.
- 4) On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
 - 4) a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geq a$, $\varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$.
 - 4) b) En déduire que si $x \geq a$, $|f(x) - x| \leq \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?
- 5) Etudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
- 6) Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f .
 - 6) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.
 - 6) b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

Partie IV :

Dans cette partie, φ est la fonction définie, pour tout x réel, par $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

- 1) Justifier que φ vérifie les hypothèses du problème.
- 2) Sans calculer $f(x)$ et en utilisant les résultats des parties précédentes, esquisser le graphe de la fonction f , en précisant les éléments remarquables (asymptotes, axe de symétrie, points à tangentes horizontales ou verticales).